$8°/\ A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^3 x + \sin^3 x)\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x(1-\sin^2 x) + \sin x(1-\cos^2 x))\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x + \sin x - \cos x \sin^2 x - \sin x \cos^2 x)\,dx$

$= \left[\sin x - \cos x - \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{27-9\sqrt{3}}{24}$

Solution 2 :

1°/a) f est définie et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ on a :

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$.

f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $]\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x); \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)[= \mathbf{R}$.

b) * f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $f'(x) \neq 0$.

donc g est dérivable sur $f(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[) = \mathbf{R}$.

* $\forall x \in \mathbf{R}$ on a : $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$. Posons $g(x) = y$

d'où $g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$. Or $f'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + tg^2 y$.

Or $g(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = 1 + tgy \Leftrightarrow tgy = x-1 \Leftrightarrow tg^2 y = x^2 - 2x + 1$

d'où $f'(y) = x^2 - 2x + 2$ et par suite $\forall x \in \mathbf{R}$ on a :

$g'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

2°/a) $\mathbf{I} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \int_1^2 g'(x)dx = [g(x)]_1^2 = g(2) - g(1)$

b) On a : $\mathbf{I} = g(2) - g(1)$.